

## Tema 12: Negociación con dos jugadores

1. El problema de la cooperación en los juegos es acordar un reparto del producto de la misma. Es el caso, por ejemplo, del cártel. Dos empresas tienen la opción de competir entre ellas, y acabar en un equilibrio de Cournot, o bien cooperar para formar un monopolio y repartirse el beneficio. La Figura 12.1 presenta un sencillo caso de reparto de una cantidad  $D$ . Las distintas posibilidades de reparto quedan recogidas en la llamada *función de coalición*, que responde a la expresión  $a_1 + a_2 = D$ , que es una recta, siendo  $D$  la cantidad a repartir y  $a_1$  y  $a_2$  la parte que corresponde a cada jugador. Cualquiera de los dos jugadores se lo puede llevar todo, o una parte; incluso es posible que la suma de lo que acuerden no alcance el total ( $a_1 + a_2 \leq D$ ). Por tanto, todos los puntos del triángulo formado por la recta inclinada de la Figura 12.1 y los ejes son factibles. El juego es simétrico porque la longitud de los catetos es igual. La *solución* del juego debe cumplir dos requisitos: primero, *eficiencia*, que implica  $a_1 + a_2 = D$ , es decir, repartir todo el dinero, o lo que es lo mismo, situarnos sobre la recta inclinada (que por eso se llama también *recta de reparto eficiente*); y segundo, simetría, que implica  $a_1 = a_2$ , que quiere decir que ambos jugadores ganen lo mismo, y gráficamente que nos situemos sobre la bisectriz (una recta creciente con pendiente de  $45^\circ$  que parte del origen). Las dos condiciones consideradas a la vez forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y la solución es  $a_1 = a_2 = D/2$ . Se trata del punto de corte de la bisectriz y la recta de reparto eficiente.

2. Pero los juegos de negociación simétricos son sólo un caso particular. Puede haber muchas asimetrías. La primera, debida a que las cantidades a repartir se expresen en unidades de medida diferentes. Si la asimetría se debe a esto, la solución es fácil: pasamos las cantidades a una misma unidad de medida y solucionamos el juego simétrico. Ello es así porque las soluciones de los juegos de negociación, deben cumplir una **propiedad de invarianza lineal en la negociación**.

3. Otra asimetría surge de las diferentes *actitudes ante el riesgo*. Partimos de la misma función de reparto eficiente de antes,  $a_1 + a_2 = D$ . Pero ahora esas cantidades de dinero proporcionan distintas utilidades a los jugadores, ya que uno es neutral ante el riesgo, y  $u_1 = a_1$ , mientras que otro es averso al riesgo y  $u_2 = (a_2)^b$ , siendo  $b < 1$ . Ya que  $D$  viene expresada en unidades monetarias, despejamos  $a_2$  y obtenemos  $a_2 = (u_2)^{1/b}$ , que sustituimos para obtener  $a_1 + a_2 = u_1 + (u_2)^{1/b} = D$ . Esta función aparece en la Figura 12.3., y para obtener la forma representable se despeja la variable que va al eje vertical:  $u_2 = (D - u_1)^b$ . El averso al riesgo –jugador 2– es la parte débil de la negociación, por lo que el juego pasa a ser asimétrico, con menores ganancias máximas para él. La condición de *eficiencia* se mantiene aquí, es decir, nos situaremos sobre la curva de reparto eficiente, y no bajo ella. Pero la condición de simetría ya no tiene sentido. Hay una nueva condición para determinar la solución, y se llama **dominancia en riesgo**. Esta condición implica que debe maximizarse el producto de las utilidades, es decir,  $\max u_1 u_2$ . Sustituyendo una condición en la otra, derivando e igualando a cero obtenemos  $u_1 = D/(1+b)$ , y de ahí  $u_2 = D - u_1 = bD/(1+b)$ . Cuanto más averso al riesgo es el jugador 2, menor es  $b$  y menor es también su parte del pastel. La *condición de dominancia en riesgo*, para poder maximizar el producto  $u_1 u_2$ , aumentará en consecuencia el tamaño de  $u_1$ . Esta solución es lo que se conoce como **solución de negociación de Nash**, que incorpora las propiedades de eficiencia, dominancia en riesgo -en sustitución de simetría- e invarianza.

4. Otra fuente de asimetría está en las diferencias en las consecuencias del desacuerdo. Hasta ahora hemos supuesto que si los jugadores no llegan a un acuerdo, se quedan sin nada. Pero puede que no sea igual para los dos jugadores, y el primero tenga una alternativa externa al juego igual a  $d_1$  y el segundo una alternativa  $d_2$ . Esto se arregla de la siguiente forma: *al total a repartir se le sustraen las alternativas externas al juego de ambos jugadores y lo que queda se reparte de forma equitativa*. Esta regla no es producto del capricho, sino que se obtiene a partir de la aplicación de los criterios de eficiencia y dominancia en riesgo que ya hemos visto, pero ligeramente adaptada al caso: eficiencia,  $u_1 + u_2 = D$ ; y dominancia en riesgo,  $\max(u_1 - d_1)(u_2 - d_2)$ <sup>1</sup>. Se representa en la Figura 12.5. Se deduce de aquí una propiedad de **invarianza con respecto al punto de desacuerdo**, que es una variante de la propiedad de invarianza lineal que hemos visto.

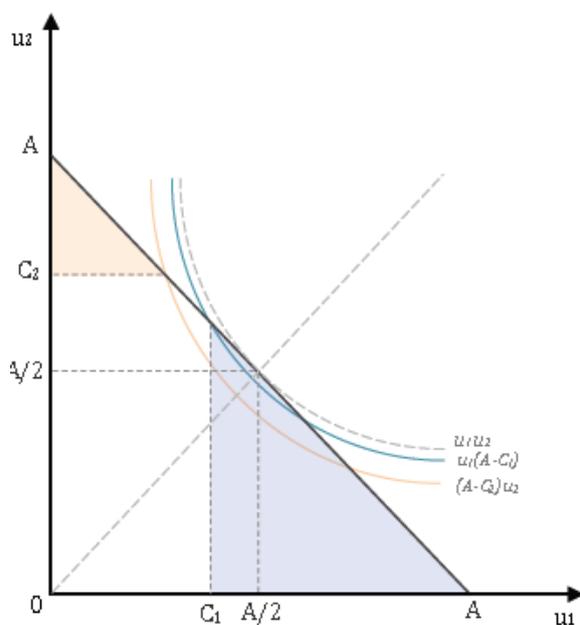
5. La última fuente de asimetría radica en las restricciones exógenas que pueden afrontar los jugadores. Por ejemplo, dos jugadores acuden como acreedores a la liquidación de una empresa en quiebra, pero cada uno es acreedor por un montante distinto. La liquidación no genera recursos suficientes para pagar todas las deudas. Los activos a liquidar son  $A$  y las deudas son  $C_1$  y  $C_2$ , de manera que  $C_1 + C_2 > A$  y  $C_1 \neq C_2$  y, supongamos,  $C_1 < C_2$ . Si los acreedores-jugadores quieren cobrar algo, tienen que llegar a un acuerdo para repartirse lo que hay. La Figura 12.4 representa el caso (a partir de un ejemplo numérico concreto) y a pesar de la asimetría *la solución del juego tiene que ser simétrica*. Esto puede parecer sorprendente, pero tiene su explicación. Si el juego fuera simétrico ( $C_1 = C_2$ ), obviamente, la recta de reparto eficiente sería  $u_1 + u_2 = A$  y la solución requeriría simetría, con lo que sorprendente, pero tiene su explicación. Si el juego fuera simétrico ( $C_1 = C_2$ ), obviamente, la recta de reparto eficiente sería  $u_1 + u_2 = A$  y la solución requeriría simetría, con lo que tendríamos  $u_1 = u_2 = A/2$ .

6. Pero cuando el juego es asimétrico la solución no es tan fácil de explicar. Hay dos casos. Primer caso: *cuando  $A/2 \leq C_1$  se reparten los activos a medias*, pues la *condición de dominancia en riesgo* lleva a esta solución sencilla, simétrica. De la recta de reparto eficiente:  $u_2 = A - u_1$ . De la condición de dominancia en riesgo:  $\max u_1 u_2 = \max (A - u_1) u_1$ . Derivando e igualando a cero  $A - 2u_1 = 0$ ,  $u_1 = A/2 = u_2$ . Esto se explica por otra propiedad de la *solución de negociación de Nash*, que se llama **propiedad de la independencia de las alternativas irrelevantes**. La idea es que la solución de uno de estos juegos de negociación no depende de aquellas alternativas que, por el motivo que sea, no pueden ser soluciones. La Figura 12.7 permite explicarlo. La parte (a) es el típico juego simétrico, y la solución de negociación de Nash es el punto medio  $(A/2, A/2)$ . La parte (b) incluye una restricción  $C_2$  a la cantidad que puede demandar el jugador 2, de forma que parte de las posibilidades (por encima de  $C_2$ ) quedan excluidas. Según la *propiedad de alternativas irrelevantes* estas posibilidades excluidas, entre las que no estaba la solución, no afecta a esta, que sigue siéndolo con o sin  $C_2$ . En la parte (c) introducimos una limitación  $C_1$  a lo que el jugador 1 puede reclamar. Dado que la solución original no está en esa zona excluida, y dado que la misma es independiente de las alternativas que sean irrelevantes, y las excluidas lo son, seguirá siendo la solución tras la exclusión. Veámoslo así: si  $A$  es preferida a  $B$  y  $B$  es preferida a  $C$ , por la propiedad transitiva  $A$  es preferida a  $C$ , y la desaparición de  $C$  no altera la relación entre  $A$  y  $B$ , de forma que  $A$  seguirá siendo preferida a  $B$ . Esta es la lógica que subyace a la *propiedad de alternativas irrelevantes*.

<sup>1</sup> Si los dos jugadores tienen distinto poder de negociación, reflejado en los índices  $a$  y  $b$  tal que  $a + b = 1$ , tendríamos que usar la función  $(u_1 - d_1)^a (u_2 - d_2)^b$ .

7. Segundo caso: cuando  $A/2 > C_1$  (suponemos que  $C_1 + C_2 > A$  y  $A - C_1 < C_2$ ) el acreedor con menor deuda la satisface plenamente y lo que sobra es para el acreedor con mayor deuda. Esta es una solución se debe a que la *propiedad de la independencia de las alternativas*

*irrelevantes* no ayuda aquí, pues  $A/2 > C_1$ , y eso *sí excluye* la solución  $(A/2, A/2)$ . La *solución de negociación de Nash* en este caso trata de cumplir con los criterios de eficiencia ( $u_1 + u_2 = A$ ) y dominancia en riesgo ( $\max u_1 u_2$ ), y la solución matemática es acercarse todo lo posible a la solución simétrica. Hay una explicación intuitiva, visual. Recordemos el problema de maximización de la utilidad que afronta el consumidor que tiene que distribuir su renta entre dos bienes. El juego de la quiebra es *formalmente igual*: la recta de reparto eficiente sería la restricción presupuestaria, y la expresión matemática de la dominancia en riesgo es igual a una curva de indiferencia.



Se trata de encontrar la solución de tangencia (véase la Figura 12.5), es decir, la curva  $u_1 u_2$  más alta posible que toque a la recta de reparto eficiente. La curva  $u_1 u_2$  tiene tal forma que si el juego es simétrico la solución siempre estará en el centro. Si excluimos las zonas extremas de la recta, la solución sigue siendo la misma, en el centro. Pero si el centro es excluido ninguna solución de tangencia es ya posible. Ahora habrá que seleccionar la curva  $u_1 u_2$  que corte a la recta de reparto y que sea lo más alta posible. Intuitivamente podemos ver que **cuanto más cerca esté el punto de corte buscado del centro, más alta será la curva alcanzada**. Por tanto la solución será el punto  $(C_1, A - C_1)$ . Véase que si hiciéramos lo contrario,  $(A - C_2, C_2)$  la curva  $u_1 u_2$  sería más baja. El gráfico de la izquierda lo muestra.

8. Se han buscado conjuntos de criterios distintos a los de Nash para solucionar esta clase de juegos, ya que pueden dar lugar a soluciones extrañas en los juegos asimétricos. **Kalai y Smorodinsky** proponen un **criterio de monotonicidad** que reemplace al de independencia de las alternativas irrelevantes. La idea es esta: *si la recta de reparto eficiente se eleva, añadiendo nuevas y mayores posibilidades de reparto para ambos jugadores, podremos alcanzar curvas  $u_1 u_2$  más altas, y el cambio en la solución tiene que beneficiar a ambos*. Para asegurarnos de esto, Kalai y Smorodinsky unen el punto de desacuerdo (generalmente el origen de coordenadas), y el punto de ganancias máximas  $(A, A)$  con una recta, y allí donde esta corte la recta de reparto eficiente tendremos la solución. La Figura 12.9 (b) muestra que si la recta (o curva) de reparto eficiente gana en posibilidades (sube, aunque sólo sea en una zona), la solución de Nash podría seguir coincidiendo con la de Kalai y Smorodinsky  $(0,6, 0,6)$ . ¿Por qué? Porque si nos moviéramos de la solución de Nash al nuevo punto elevado (caso 2), un jugador (el 2) ganaría  $(0,8$  en vez de  $0,6)$ , pero el otro (el 1) perdería  $(0,5$  en vez de  $0,6)$ . Si nos vamos a ese punto elevado, donde un jugador gana y el otro pierde, estaremos aplicando la solución de Nash: véase la Figura 12.8 (b), que viola el criterio de monotonicidad, porque mejora a un jugador perjudicando al otro. En las páginas 385 y 386 hay un par de ejemplos.

9. Los procesos de negociación requieren tiempo, y los jugadores pueden tener distintas estrategias durante el mismo: puede haber ofertas, rechazos y contraofertas. Aquí es clave la existencia o no de información completa. En el video de presentación de la asignatura vimos uno de estos juegos de reparto de dinero con información completa, que no tenía fin. Cuando el tiempo tiene un coste (el dinero a repartir pierde valor a una tasa determinada por el tipo de interés o por la inflación), el juego se limita en el tiempo. El criterio que ayuda a encontrar una solución es el de **consistencia en la negociación**: *nunca se debe pedir lo que se ha rechazado antes*. Usemos  $R = 1/(1+r)$ , donde  $r$  es un tipo de interés, como factor de descuento. El jugador 1 pide en el momento cero ( $t = 0$ ) una cantidad  $a_1(0)$ , lo que supone ofrecer al jugador 2 lo que sobra, que es  $D - a_1(0)$ , donde  $D$  es la cantidad que se negocia, y este lo rechaza. El jugador 2 tendrá que pedir en el momento uno ( $t = 1$ ) *al menos*  $a_2(1) = D - a_1(0)$ , cumpliendo con la regla de consistencia. Además, si el jugador 1 pide  $a_1(0)$  en el momento cero, debería ser aceptable para él una cantidad  $a_1(0)R$  en el momento 1, por lo que  $a_1(0)R = a_2(1)$  es también un criterio para el jugador 2 en su respuesta. Resolviendo el sistema tenemos  $a_1(0) = D/(1+R)$  y  $a_2(1) = DR/(1+R)$ . La solución al juego es que el jugador 1 pida  $D/(1+R)$  y el jugador 2 lo acepte inmediatamente para no perder el tiempo. Dado que el jugador 1 mueve primero sale ganando, pues  $D > DR$ . El consejo es no esperar. La solución tiene el nombre de **Stahl-Rubinstein**.

10. La espera –no precipitarse en una negociación– sí tiene sentido cuando la información es imperfecta. Por ejemplo, cuando un jugador sabe lo que hay en juego y el otro no. La clave aquí está en hacer creíble las esperas, lo que requiere que sean suficientemente largas. El libro lo explica bien mediante un par de ejemplos. Téngase en cuenta que  $e^{-rt}$  es el tipo de descuento para tiempo continuo, siendo  $r$  un tipo de interés instantáneo. El equivalente para saltos discretos de tiempo es  $R^t$ .

Trataremos de juegos con beneficios sustanciales y oportunidades de cooperación.

El más simple será de dos jugadores y la forma función de coalición será útil para describirlos, ya que es un atajo para la solución (sobre todo cuando se puede obtener la misma respuesta para las formas normal y extensiva).

Todos estos juegos los trataremos como de cooperación, presentando dos soluciones clásicas: Nash y Kalai-Smorodinsky, y sus propiedades. También veremos cómo influye el riesgo en ellas.

Por último, una negociación secuencial, con ofertas y contraofertas, y la solución clásica de Stahl y Rubinstein.

En problemas con información imperfecta, las ofertas, contraofertas y rechazos de las mismas pueden revelar información privada

### 12.1.- Juegos de Negociación:

En hagamos un trato, supongamos que hay una suma de dinero  $D$  sobre la mesa.  $J_1$  y  $J_2$  tienen interés en el mismo; da igual la naturaleza de los mismos.

El desacuerdo llega cuando ambas partes son capaces de dar el sí a una propuesta → el punto de desacuerdo, será el vector  $d=(d_1, d_2)$ .

Supondremos que el desacuerdo es que el dinero desaparece,  $d=(0, 0)$ , que no hay acuerdo o transacción.

Ahora dejamos que cada parte realice una propuesta; la estrategia de  $j_i$  es pedir la suma de dinero  $a_i$  (entre 0 y  $D$ ). Pedir más que  $D$  implica ganancia negativa para la otra parte, pero como ésta puede ganar cero si dice no, no aceptará la oferta. Del mismo modo ocurre si pedimos menos de cero; perderemos dinero.

Un reparto eficiente satisface la ecuación:

$$a_1 + a_2 = D$$

las propuestas suman todo el dinero, las ganancias las capturan ambas partes y no se desperdicia nada → eficiencia.

Si cada jugador es neutral ante el riesgo y para cada uno la utilidad es igual al dinero:

$$u_1 = a_1$$

$$u_2 = a_2$$

Si las propuestas son aceptadas, y sustituyendo en la recta de reparto eficiente:

$$u_1 + u_2 = D$$

El punto de desacuerdo  $d$  y la recta de reparto eficiente, juntas constituyen la forma de coalición del juego de negociación, la cual proporciona únicamente información sobre las ganancias, sin adentrarse en otros aspectos estratégicos.

Mirando la forma normal del juego bajo la forma función de coalición, podemos proporcionar detalles estratégicos.

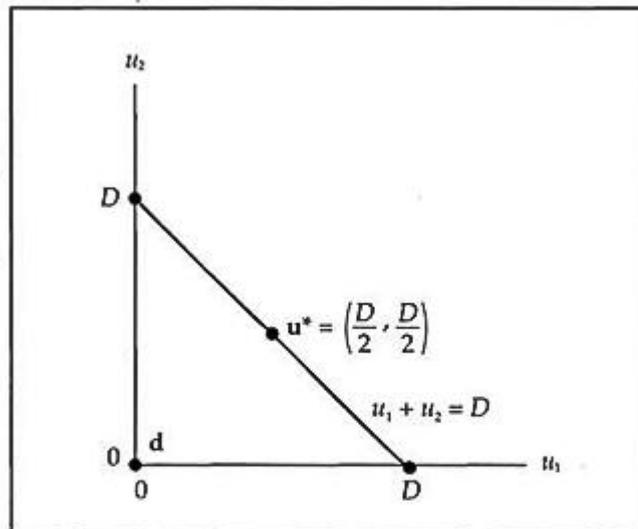


Figura 12.1. Juego de negociación, forma función de coalición.

Cada jugador  $j$  pide simultáneamente una suma de dinero  $a_j$ ; si la suma de las dos propuestas no excede del dinero en juego, los jugadores han alcanzado un acuerdo y ambos obtienen lo que pidieron.

Si la suma de ambas es superior, no existe acuerdo y obtienen las ganancias del desacuerdo:

$$u_1(a_1, a_2) = a_1 \text{ si } a_1 + a_2 \leq D \\ = 0 \text{ en caso contrario}$$

$$u_2(a_1, a_2) = a_2 \text{ si } a_1 + a_2 \leq D \\ = 0 \text{ en caso contrario}$$

Esta forma normal tiene varios equilibrios: cualquier par de propuestas  $a=(a_1, a_2)$  que satisfaga:

$$a_i \geq 0$$

$$a_1 + a_2 = D$$

y

Si la suma de ambas propuestas excede a D, ambos obtienen 0, y al menos uno de ellos podría reducir su propuesta y obtener ganancia positiva.

Si la suma de ambas es menor que D, queda dinero en la mesa y uno de ellos podría aumentar su propuesta y obtener una ganancia mayor.

Si cualquiera de los dos puede obtener una ganancia negativa → podría elevar su utilidad a cero mostrando su desacuerdo.

Es un juego simétrico y ambos jugadores cuentan con las mismas estrategias → su solución es el único equilibrio simétrico entre todas estas posibilidades:

$$a_1 = a_2 = D/2$$

es decir, dividirse el dinero de forma equitativa.

A este mismo resultado llegaríamos más rápido si aplicamos los principios de “Simetría en la negociación” y “Eficiencia en la negociación”

- Simetría en la negociación: La solución a un juego de negociación simétrico es simétrica. Cualquier punto posible de la recta  $u_1 = u_2$  satisface la simetría.
- Eficiencia en la negociación: La solución a un juego de negociación es eficiente → la solución debe estar en la recta de negociación eficiente.

La línea de simetría y la recta eficiente se cruzan en un punto exacto, de división equitativa, que es la solución en forma de coalición.

Estos dos principios son suficientes para resolver cualquier juego de negociación simétrico; pero hay muchos juegos asimétricos.

## **12.2.- Asimetrías y la solución de negociación de Nash:**

Hay cuatro asimetrías que pueden tener impacto en los juegos de negociación y que cambian la apariencia de la figura 12.1

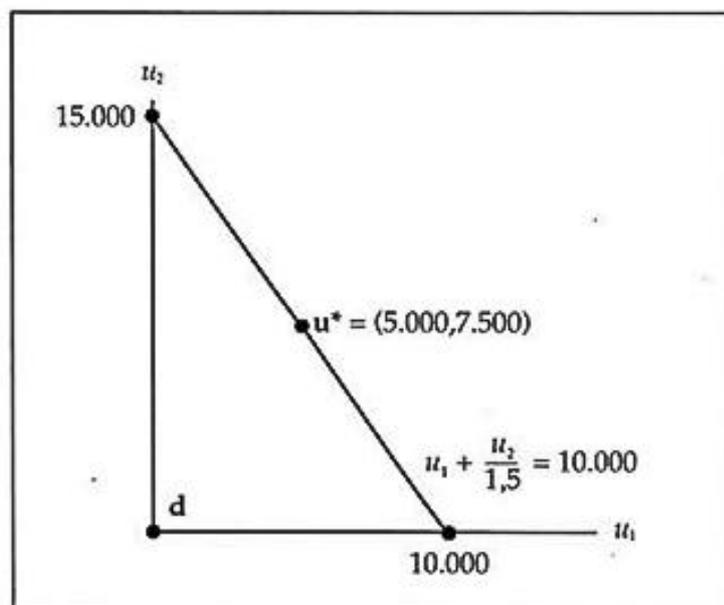
a) Medio de pago de dinero sobre la mesa: Ganancias de ambos en distinta moneda. Si  $j_1$  en dólar y  $j_2$  en marcos alemanes, y el tipo de cambio es 1,5marcos=\$1.  $J_2$  además de recibir las ganancias en esa moneda, hace sus apuestas en su moneda, marcos → las propuestas de utilidad deberán convertirse a dólares para poder compararlas con las de  $j_1$ .

Si hay \$10.000 sobre la mesa, la recta de reparto eficiente es:

$$a_1 + \frac{a_2}{1,5} = 10.000$$

que sustituido el dinero por la utilidad:

$$u_1 + \frac{u_2}{1,5} = 10.000$$



**Figura 12.2. Asimetría en medios de pago.**

El punto de desacuerdo todavía está en  $(0, 0)$  ya que  $\$0=0$  marcos.

Aplicando la simetría a este juego asimétrico obtenemos  $u_1=u_2=6.000$ .

Aquí lo extraño es que a  $j_1$  se le pagan \$6.000 mientras que a  $j_2$  se le pagan 6.000 marcos, o \$4.000, por lo que el resultado no es simétrico.

Muchos no creen que la asimetría tenga importancia en una negociación → el siguiente principio, de Invarianza lineal en la negociación, tiene el antídoto a la asimetría: asegura la misma ganancia a todos los jugadores con independencia de la moneda de cobro:

Supongamos que  $u^* = (u_1^*, u_2^*)$  es la solución al juego de negociación con la recta de reparto eficiente  $u_1 + u_2 = D$  → la solución al juego de negociación con la recta de reparto eficiente  $u_1/k_1 + u_2/k_2 = D$  es

$$(k_1 u_1^*, k_2 u_2^*)$$

Lo que hace una invarianza lineal es convertir la ganancia de  $j_2$  en dólares, multiplicando por el tipo de cambio **1,5 marcos = \$1**,  $k_2=1,5$ , y consiguiendo que las ganancias de ambos sean iguales.

La solución que satisface la invarianza lineal vendrá representada por el vector  $u^*=(5.000, 7.500)$ .

Cuando ambos tipos de cambio son distintos de 1, los dos jugadores reciben las ganancias en otra moneda.

Las soluciones que estudiaremos aquí satisfacen la invarianza lineal.

b) La actitud ante el riesgo: Supongamos que  $j_1$  es neutral ante el riesgo, pero  $j_2$  es averso al mismo, con  $u_2 = (a_2)^b$ , donde  $b < 1$  → Al sustituir la función de utilidad en la recta de reparto eficiente obtenemos la curva de reparto eficiente:

$$u_1 + (u_2)^{1/b} = D$$

Esta curva para  $b=0,5$  y  $D=100$  será:

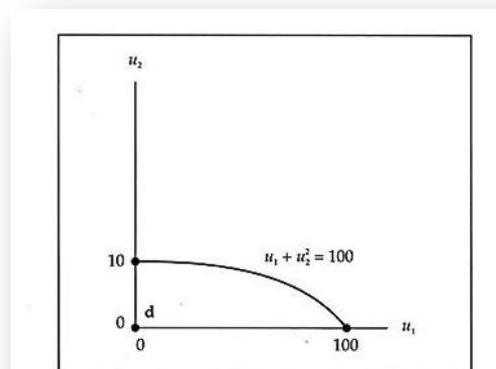


Figura 12.3. Juego de negociación, asimetría en la actitud ante el riesgo.

Cuanto más averso al riesgo sea un jugador más debería temer al desacuerdo, es decir, más de acuerdo estaría en aceptar un reparto menos equitativo de dinero.

El equilibrio dominante en riesgo maximiza el producto de las utilidades de los jugadores, pues la alternativa al equilibrio es una ganancia de cero → el máximo de la función  $u_1 u_2$  en la curva  $u_1 + (u_2)^{1/b} = D$  se puede calcular así:

- Sustituyendo la ecuación de la curva en el objetivo:

$$\max u_1 (D - u_1)^b$$

y el máximo de este producto ocurre cuando:

$$0 = (D - u_1)^b + u_1^b (D - u_1)^{b-1} (-1)$$

multiplicando ambas partes por  $(D - u_1)^{1-b}$ , y simplificando:

$$D - u_1 = b u_1$$

Resolviendo, la ganancia dominante en riesgo del j1, neutral ante el riesgo es:

$$u_1 = D/(1 + b)$$

El dinero que queda,  $D - u_1 = bD/(1 + b)$ , es el dinero que va a parar a j2.

Si  $b=0,5$  y  $D=100$ , entonces j1, neutral ante el riesgo, obtiene 2/3 del dinero (\$66,67) y el j2, averso al riesgo, obtiene la mitad (\$33,33) → cuanto más averso al riesgo es un jugador, cuanto más cerca de cero esté  $b$ , más cerca de 0 está la parte de dinero de dicho jugador.

Con dominancia en riesgo, con un jugador extremadamente averso al riesgo puede negociarse casi hasta cero → Solución de negociación de Nash: cuando el punto de desacuerdo es (0, 0), esta solución maximiza el producto de las utilidades de los jugadores. Este cálculo se puede hacer sin prestar atención a los equilibrios de la forma normal, lo que es un atajo.

La solución de Nash satisface la simetría, eficiencia e invarianza lineal.

c) Las opciones externas a la negociación: La quiebra es una de las posibles restricciones en las propuestas de los jugadores.

Supongamos que  $j_1$  y  $j_2$  tienen propuestas contra los activos de una empresa en quiebra. Por ley, ninguno puede pedir más de lo que se le debe. Si las deudas con ambos son diferentes, hay asimetría a un tiempo  $\rightarrow$  ambos van a ser neutrales ante el riesgo.

Si la empresa en bancarrota debe \$80.000 a  $j_1$  y \$40.000 a  $j_2$ , y si tiene en activos \$50.000, solo podrá pagar a los acreedores si llegan a un acuerdo. La recta de acuerdo eficiente es:

$$u_1 + u_2 = 50.000$$

donde  $a_1 = u_1$ , no puede exceder de \$80.000 y  $a_2 = u_2$ , no puede exceder de \$40.000.

La forma función de coalición:

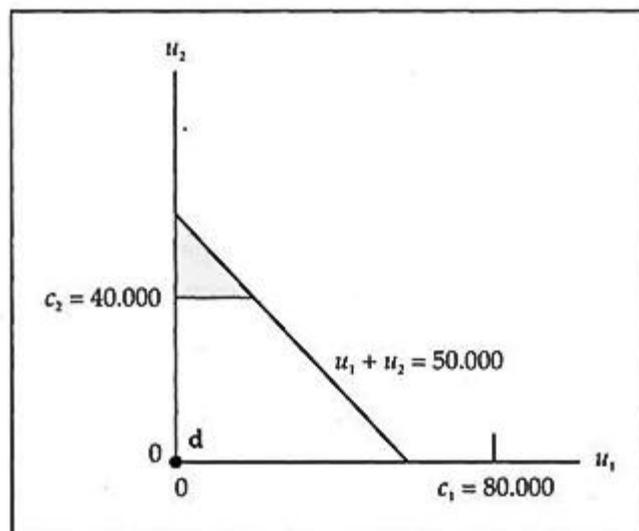


Figura 12.4. Juego de negociación, quiebra.

El juego no es simétrico: el vértice izquierdo del triángulo de ganancias con vértices en  $(0, 0)$ ,  $(0, 50.000)$  y  $(50.000, 0)$  no está disponible para  $j_1$ . La solución de Nash no tiene en cuenta tal asimetría y divide los \$50.000 entre ambos jugadores equitativamente.

d) Los límites legales a las propuestas: Asimetría que deriva de diferencias en las opciones externas y que toman la forma de un punto de desacuerdo distinto de cero.

Supongamos que hay \$50.000 en juego entre  $j_1$  y  $j_2$ ; si se rompen las negociaciones,  $j_1$  tiene una oferta firme de un tercero por \$15.000, mientras que  $j_2$  tiene \$0 → el punto de desacuerdo es  $d=(15.000, 0)$  en vez de  $(0, 0)$ .

Esta asimetría es importante. El dinero a repartirse representa las ganancias, no el dinero que los jugadores tengan en sus bolsillos procedentes de otra fuente → para tener en cuenta esta circunstancia se precisa otra forma de invarianza lineal: La invarianza con respecto al punto de desacuerdo:

Supongamos que  $u^*$  es la solución al problema de negociación con  $D$  en juego y punto de desacuerdo  $(0, 0)$  → la solución al problema de negociación con punto de desacuerdo  $d$  y  $D+d_1+d_2$  en juego es:

$$u^* + d$$

Sean dos personas neutrales al riesgo con \$35.000 en juego. En la solución  $u^*$  los jugadores se dividen el dinero equitativamente,  $u^*=(17.500, 17.500)$ .

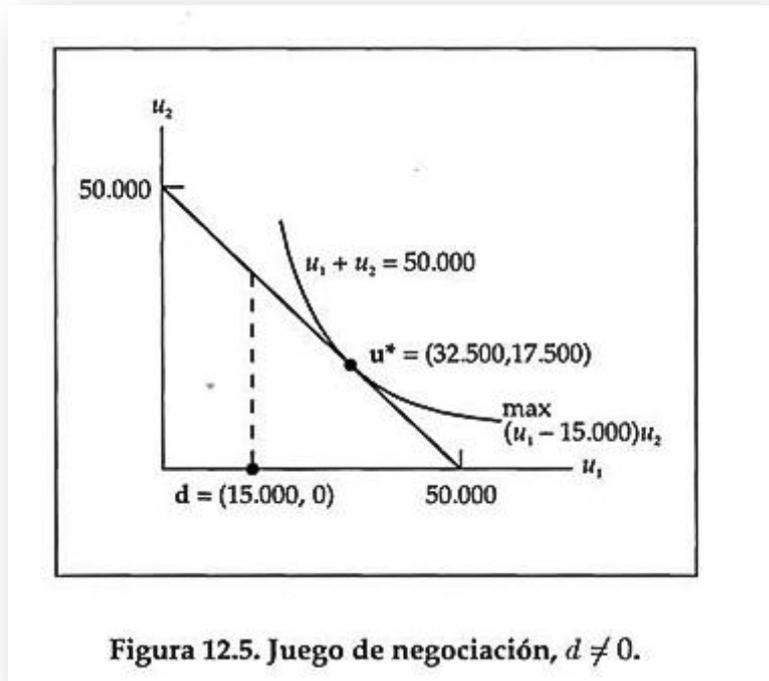
Si ahora hay \$50.000 en juego, pero  $j_1$  tiene una opción externa de \$15.000 →  $j_1$  obtiene la mitad de los \$35.000 más la opción externa de \$15.000, lo que hace un total de \$32.000:

$$u^* + d = (17.500, 17.500) + (15.000, 0) = (32.500, 17.500)$$

El resultado es que el que tiene mejor opción externa es el que sale más beneficiado de la negociación → resultado muy intuitivo: sabemos que tenemos la suerte de cara cuando podemos abandonar un trato e involucrarnos en otro casi tan beneficioso mientras el otro jugador no tiene otra opción diferente.

La solución de negociación de Nash satisface la invarianza con respecto al punto de desacuerdo maximizando  $(u_1-d_1)(u_2-d_2)$  cuando el punto de desacuerdo es distinto de cero.

En el juego de negociación de la figura 12.5, el máximo de  $(u_1 - 15.000)u_2$  en la recta  $u_1 + u_2 = 50.000$  tiene lugar cuando  $u_1 = 32.500$ .



**12.3.- Quiebra I: Independencia de alternativas irrelevantes y la solución de negociación de Nash:**

Con \$50.000 de activos a dividir entre dos acreedores neutrales al riesgo, a uno se le deben \$40.000 y al otro \$80.000; Nash otorgó como solución a cada uno \$25.000. ¿?

Sean A los activos de la empresa en quiebra; con un acreedor 1 y otro 2. El acreedor i tiene una demanda  $C_i$  contra la empresa en quiebra.

Cada demanda representa una responsabilidad legal por parte de la empresa en quiebra.

Suponemos que la antigüedad de las deudas es la misma.

En un juego de quiebra, las demandas exceden a los activos:

$$A < \sum C_i.$$

Esta desigualdad de activos y pasivos es la que crea problema a los acreedores pues no queda suficiente para pagar a todos.

Suponemos que ambos acreedores tienen la misma opción externa, 0, en el caso en que se rompan las negociaciones y no se liquiden los activos de la empresa en quiebra.

Ambos jugadores son neutrales ante el riesgo.

Por tanto, la única asimetría posible reside en las demandas → Cuando  $C_1=C_2$ , el juego es simétrico.

La recta de reparto eficiente de activos es  $a_1+a_2=A$ , y el punto de desacuerdo  $d=(0, 0)$ .

Dada la neutralidad ante el riesgo, la recta de reparto eficiente de activos es también la recta de reparto eficiente de la utilidad:

$$u_1 + u_2 = A$$

En el caso de un juego de quiebra simétrico, la solución de negociación de Nash divide los activos equitativamente:

$$u_1^* = u_2^* = A/2$$

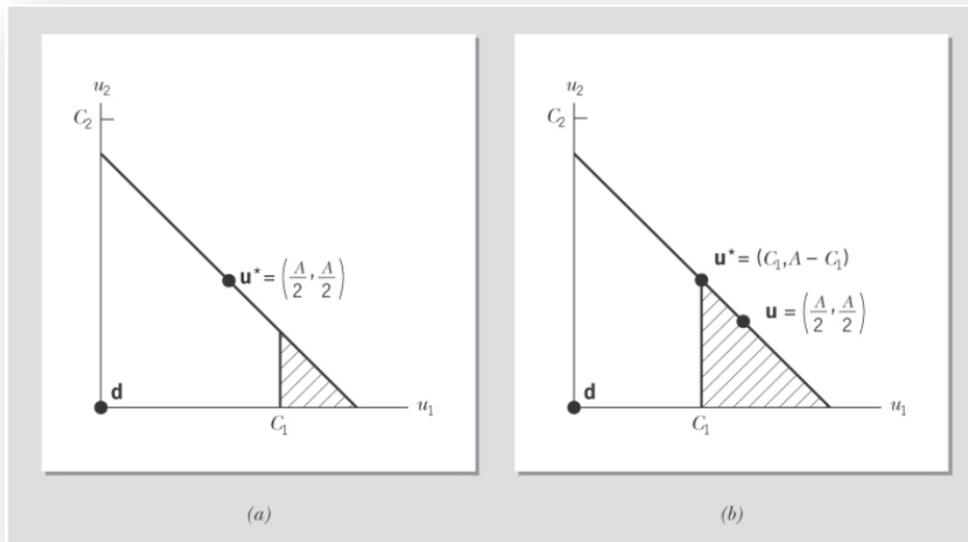
Cuando las demandas son iguales, no juegan ningún papel. Cuando son desiguales, el juego de quiebra es asimétrico → las demandas juegan su papel más importante, pero limitado.

Es útil ordenar las demandas según su tamaño:

$$C_1 < C_2$$

Las figuras 12.6 ilustran dos casos que dependen de cuanto queda de los activos relacionados con las demandas:

Cuando los activos son menores que la demanda más pequeña, la solución de Nash trata ambas demandas como si fueran iguales, porque ninguna podrá reclamar todo el dinero. Nash continúa dividiendo el dinero a partes equitativas siempre que los activos no sean mucho mayores que la demanda más pequeña.



**Figura 12.6. Quiebra, solución de negociación de Nash: (a) caso 1; (b) caso 2.**

**Caso 1:**  $A/2 < C_1$  (fig 12.6a): El producto máximo de utilidad se da en el reparto equitativo de activos.

**Caso 2:**  $A/2 > C_1$  (fig 12.6b): El producto máximo de utilidad se da en la esquina donde  $u_2^* = A - C_1$  y  $u_1^* = C_1$ .

Aquí el acreedor con la demanda menor es compensado en su totalidad, y el de la demanda mayor es compensado con el resto.

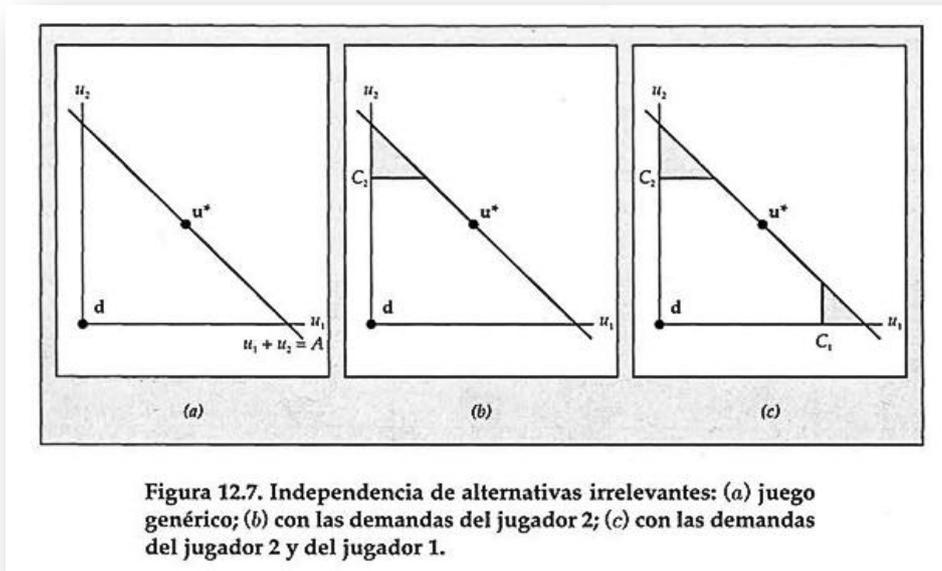
Esta solución extraña no es la usual para liquidar activos de empresas en quiebra; es como si Nash crease antigüedad donde no existe (la deuda antigua se paga entera, antes de pagar al otro acreedor). Si el demandante 2 fuera realmente más antiguo, la solución aquí también tendría dos casos:

$$u_2 = A, \text{ cuando } A < C_2$$

$$u_2 = C_2, \text{ cuando } A > C_2$$

Una propiedad especial, de negociaciones de Nash, es **Independencia de Alternativas Irrelevantes**: supongamos que conocemos la solución  $u^*$  de un juego de negociación  $\rightarrow$  descartaremos varias soluciones posibles menos la  $u^*$ ; esta será la solución del juego con menos posibilidades y las alternativas que faltan son irrelevantes ¿???

Sea un juego típico de negociación por una suma de dinero A, fig 12.7a:



La eficiencia y la simetría implican un reparto equitativo de A.

Si añadimos las demandas del jugador 2, fig 12.7b, como este no puede pedir más de lo que se le adeuda, la demanda C2 elimina alternativas. Pero ninguna de estas era relevante y por ello se pueden eliminar sin más.

A continuación sumamos las demandas de j1 y j2, fig 12.7c, Como el acreedor 1 no puede demandar más de lo que se le debe, la demanda C1 elimina alternativas → ninguna constituía tampoco la solución por irrelevantes.

Por tanto, el resultado es la solución de negociación de Nash al juego de quiebra del caso 1, fig 12.6a

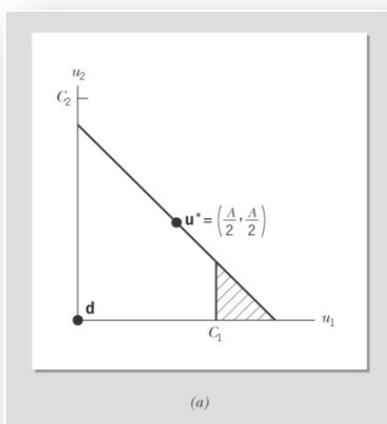


Figura 12.6. Quiebra, solución de negociación de Nash: (a) caso 1

Aplicando igual argumento al caso 2, la demanda menor elimina la alternativa relevante, la solución anterior → la única alternativa relevante es la antigua solución.

Cuando la solución de reparto equitativo se convierte en irrelevante, la solución de negociación de Nash ofrece todo el dinero que puede a la demanda menor.

La solución de negociación de Nash es la única que satisface simetría, eficiencia, invarianza lineal e independencia de alternativas relevantes.

Cualquier solución de negociación que merece nuestra atención satisface las tres primeras condiciones; la cuarta, la condición de independencia se utiliza para tratar las asimetrías.

La controversia es inevitable en casos de asimetrías ya que lo que se le debe a uno es siempre relevante de cara a lo recibido en procesos de liquidación por quiebra.

#### **12.4.- Quiebra II: Monotonicidad u la solución de Kalai-Smorodinsky:**

Lo controvertido de la solución de Nash para las quiebras ha llevado a buscar nuevas propuestas de solución a juegos en general y a las quiebras en particular.

La idea principal ha sido reemplazar la independencia de alternativas irrelevantes por otra condición; la propuesta más satisfactoria, la de Kalai y Smorodinsky que proponen la **propiedad de la monotonicidad** para solucionar negociaciones → supongamos que la curva de ganancias eficientes se desplaza en dirección del  $j_1$ , entonces su ganancia en la solución de negociación no disminuye; lo mismo ocurre con  $j_2$ , si se desplaza la curva de ganancias hacia  $j_2$ .

La solución de Nash no satisface la propiedad esta.

Sea el contraejemplo de fig 12.8: La figura a tiene solución de Nash  $u^*=(0,6, 0,6)$ . Añadimos una nueva posibilidad,  $(0,5, 0,8)$  a la curva de eficiencia, desplazando las posibilidades de utilidad a la figura b → la ganancia del  $j_1$  ha disminuido aunque la de  $j_2$  ha aumentado, lo que viola la monotonicidad para  $j_1$ .

Kalai y Somorodinsky demostraron que existe una única situación de negociación que satisface la eficiencia, simetría, invarianza lineal y monotonicidad → solución fácil de describir que no precisa cálculos:

Considerando todas las utilidades de que puedan disponer los jugadores, al menos tan buenas todas como el desacuerdo. Sean  $U_1$  y  $U_2$  las utilidades más altas respectivas de cada jugador →  $U(U_1, U_2)$  es el vector de estas utilidades máximas.

Dibujamos la recta que une el punto de desacuerdo,  $d$ , y el punto  $U$

El punto donde esa recta se cruza con la curva de ganancias eficientes será la solución de Kalai-Smorodinsky.

Sea el punto de desacuerdo  $d=(0, 0)$  y el punto de demandas máximas  $U=(1, 1)$

En la figura 12.9 a, la solución de Kalai-Smorodinsky coincide con la de Nash,  $u^*=(0,6, 0,6)$  ya que ambas soluciones satisfacen la simetría y eficiencia:

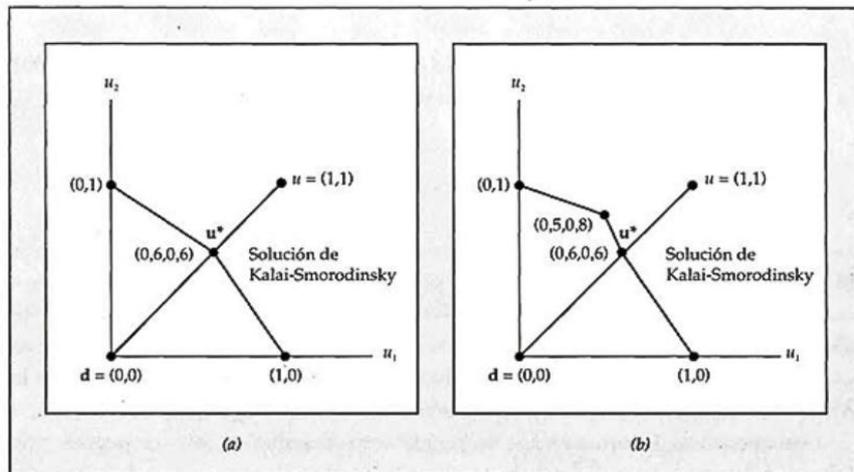


Figura 12.9. La solución de negociación de Kalai-Smorodinsky satisface monotonicidad.

En la fig 12.9 b, la solución de K\_S se queda en la solución aún eficiente  $u^*=(0,6, 0,6)$ , pese al desplazamiento  $\rightarrow$  solución que enriquece a los dos jugadores, no solo a uno, cumpliendo la propiedad de monotonicidad la solución de K\_S.

Consideremos el juego de quiebra con  $C1=\$50.000$ ,  $C2=\$100.000$  y  $A=120.000$ ,  $d=(0, 0)$  y  $U=(50.000, 100.000)$ .

La recta entre ellos viene dada por la ec:

$$u_2 = 2u_1$$

y la recta de ganancias eficientes por la ec:

$$u_1 + u_2 = 120.000$$

Estas dos rectas se cruzan en el punto  $(u_1, u_2)=(40.000, 80.000)$ , solución de  $K_S \rightarrow$  comparada con la de Nash de  $(50.000, 70.000)$ , la de  $K_S$  no paga al acreedor 1 la totalidad de la demanda; ninguno recibe la totalidad, salvo que lo hagan los dos.

La solución de  $K_S$ , como la de Nash, también paga menos a los jugadores aversos al riesgo que a los neutrales al riesgo.

Supongamos que el  $j_1$  anterior es averso al riesgo, con  $u_1=(a_2)^{0,5} \rightarrow$  La demanda del acreedor 1 en dicho juego de quiebra será:

$$(50.000)^{0,5} = 223,6$$

La curva de ganancias eficientes viene dada por

$$u_2 + (u_1)^2 = 120.000$$

El punto de desacuerdo sigue siendo  $d=(0, 0)$ , pero el  $U=(223,6, 100.000)$

La recta entre  $d$  y  $U$  viene dada por la ecuación:

$$u_2 = \left( \frac{1}{0,002236} \right) u_1$$

Sustituyendo la recta en la curva de ganancias eficientes y resolviendo la ec de segundo grado  $\rightarrow u_1=188,7$ . Resultado que implica que  $u_2=84.400$ .

El dinero pagado al acreedor 1, averso al riesgo, es  $(188,8)^2=\$35.600$ , cantidad menor que  $\$40.000$  que recibe el neutral al riesgo.

Las soluciones de  $K_S$  y Nash coinciden en su actitud frente a la aversión al riesgo pero no en sus valores.

Este tema debe entenderse de forma general, sintetizando los criterios para seleccionar una solución en juegos de negociación (estos criterios se aplican en el mundo real, aunque a Varoufakis parece no irle demasiado bien, de momento).

En el ejemplo que aparece, donde  $C_1=50.000$ ,  $C_2= 100.000$  y  $A=120.000$ , se expone que la recta entre  $d$  y  $U$  viene dada por la ecuación  $u_2= 2 u_1$ , que supongo sale de la relación entre  $50.000$  y  $100.000$ , y no entre  $C_1$  y  $A$ .

Sin embargo, en la solución del problema 5, aparecen diferentes ratios relacionando  $C_1$  con  $A$  (1 a 1, 1 a 3 y 1 a 5). Entiendo que en los tres casos la ratio debe ser la misma, es decir, 1 a 5 ( $u_2 = 5u_1$ ), y que lo que debe variar es la igualdad a  $A$  ( $1.000.000$ ,  $3.000.000$  y  $5.000.000$ ). Si es así, las soluciones difieren de las planteadas.

Le pido me aclare la contradicción, si es que existe, aunque es más que probable que no haya entendido el planteamiento.

En la solución Kalai y Smorodinsky cruzamos la recta de ganancias máximas con la recta de reparto eficiente, y nada más. Es una solución fácil.

La recta de reparto eficiente es  $u_2 = 120.000 - u_1$ .

La recta de reclamaciones máximas es  $u_2 = 2u_1$ , puesto que hay que unir el punto  $(50.000, 100.000)$  con el punto  $(0, 0)$ , y eso genera una recta que pasa por  $(0, 0)$  y con pendiente igual a 2.

El resultado es  $(u_1, u_2) = (40.000, 80.000)$ . La solución de Nash es más complicada, porque hay casos que considerar.

Lo que tiene que hacer es resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. El sistema está formado por:

$$u_2 = 120.000 - u_1$$

y

$$u_2 = 2u_1$$

Si sustituimos...

$$2u_1 = 120.000 - u_1$$

$$3u_1 = 120.000$$

$$u1 = 40.000$$

y por tanto

$$u2 = 80.000$$

Si no hubiera restricciones el reparto sería 60.000 para cada uno. Pero la suma de lo que se debe a estos dos jugadores excede el importe de la liquidación, pues  $50.000 + 100.000 = 150.000 > 120.000$ .

La cantidad menor es  $50.000 < 120.000/2$ . En este caso se concede todo al que reclama menos (50.000) y el resto (70.000) al otro.

Esta es la solución de Nash cuando  $C1 < A/2$ .

En definitiva:

La solución de Nash introduce el concepto de negociación como un conjunto de asignaciones de utilidad resultantes de los acuerdos posibles y busca posibles soluciones. Para encontrar una solución al juego demostró que existe un único equilibrio en el que se llega a una solución en juegos de negociación que cumple las 4 axiomas ideales de una buena solución al juego: Eficiencia, Simetría, Invarianza e independencia de soluciones irrelevantes. Aquella combinación que cumpla estas axiomas será la solución de juego según Nash.

La solución de Nash que cumple esas axiomas es única ya que permite encontrar una solución Pareto eficiente, sin embargo cuenta con un importante problema: asigna distintos resultados a los jugadores según su posición frente al riesgo.

Para resolver ese problema de "falta de equidad" en el reparto final fruto del acuerdo, se introduce la solución Kalai-Smorodinsky que propone que las utilidades de los jugadores deben ser proporcionales a las utilidades máximas que puedan obtener. De modo que si varía el conjunto de resultados, las utilidades de los agentes deben variar y conseguir al menos lo mismo que antes de la variación. (De modo que quizás sea una crítica a la solución de Nash en las que vemos que siempre sale perdiendo el agente que muestre mayor aversión al riesgo).

Tal y como está explicado en las **orientaciones** (con algo más de profundidad que en el libro), pero no es necesario aprenderse esos detalles.

No hago preguntas para responder "de memoria", así que hay que entender cómo se alcanza la solución en un gráfico, y la diferencia entre los dos métodos. Pero con eso es suficiente.

### 12.5.- MCI y BT llegan a un acuerdo:

Con frecuencia la forma en que los jugadores representan el juego de negociación tienen gran impacto en el acuerdo al que se llega, si se llega a alguno.

1993: Las gigantes en tamaño, MCI y BT, ambas de telecomunicaciones, llegan a un acuerdo tras muchas negociaciones rotas que beneficiaba a ambas partes...

### 12.6.- Negociación secuencial con información perfecta:

A veces hay que llegar a la forma extensiva para aplicar ciertos fenómenos reales.

Esperar a un acuerdo mejor: un jugador que espera es alguien que rechaza un acuerdo hasta que consigue mejores términos.

En la negociación secuencial con información completa, no hay espera en la trayectoria del equilibrio perfecto en subjuegos; pero puede darse una espera en esa trayectoria, si es la única forma de hacer creíble la información privada.

La negociación en forma extensiva se modela como secuencia de ofertas y contraofertas, dando lugar a una negociación secuencial.

Supongamos que existe una cantidad de dinero  $D$  en juego.

Sea  $a_i(t)$  las suma que  $j_i$  pide en el momento  $t$

$j_1$  es el primero en decidir en el momento  $t=0$ ; y pide la cantidad  $a_1(0)$  → el resto del dinero,  $D - a_1(0)$ , va a  $j_2$  si lo acepta inmediatamente. Pero si  $j_2$  rechaza la oferta de  $j_1$ , realiza una contraoferta en el próximo turno,  $a_2(1)$  →  $j_1$  tendrá que aceptarla o rechazarla...:

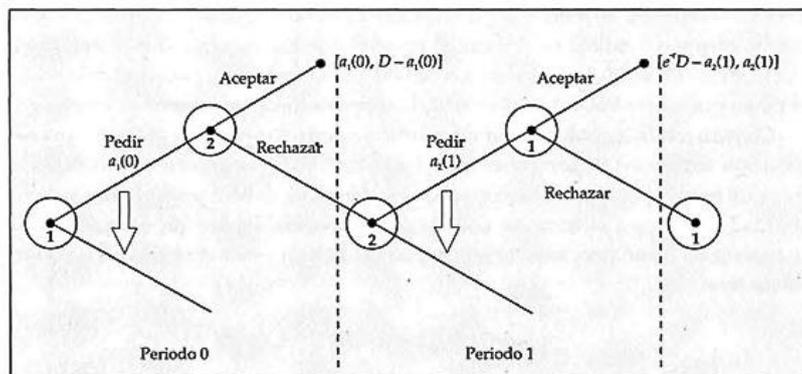


Figura 12.10. Negociación secuencial, los dos primeros periodos.

El tiempo es oro y además hay un coste de oportunidad por tener el dinero parado.

Si el tipo de interés de cada periodo es  $r$ , y el interés es compuesto, el valor del dinero tras  $T$  periodos es,  $De^{-rT}$

Si los dos jugadores no se ponen nunca de acuerdo, el dinero acaba perdiendo su valor.

Si existe un límite de tiempo finito se tiende a llegar a soluciones extremas.

Si el límite es  $0 \rightarrow$  negociación con ultimátum:  $j_2$  debe decidir si acepta o no la oferta de  $j_1$  y a continuación se acaba el juego.

En equilibrio perfecto en subjuegos,  $j_1$  consigue todo o casi todo el dinero; si el juego puede durar otro periodo, permitiendo que  $j_2$  haga su contraoferta,  $j_1$  no podrá obtener casi todo el dinero.

Como el dinero va disminuyendo sin parar,  $j_1$  necesita hacer una contraoferta atractiva para que  $j_2$  acepte inmediatamente.

Si  $j_1$  propone  $a_1(0)$ , es decir, ofrece a  $j_2$  la diferencia  $D-a_1(0)$ , Cuándo deberá aceptar  $j_2$  la oferta?

Consistencia en la negociación: nunca se debe pedir lo que se ha rechazado antes: supongamos que  $j_1$  pide inicialmente  $a_1(0)$  y deja para  $j_2$ ,  $D-a_1(0) \rightarrow$  si  $j_2$  rechaza esta cantidad deberá pedir al menos esa cantidad cuando le toque su turno; como tendrá que esperar un turno, deberá pedir al menos un  $a_2(1)$  que satisfaga:

$$a_2(1) e^{-r} = [D - a_1(0)]$$

donde  $e^{-r}$  representa el factor descuento de un periodo, y  $r$  es el tipo de interés de dicho periodo.

Si el tipo es del 10%, obtener \$40 equivale a recibir \$44,21 en el siguiente periodo.

El subjuego que comienza con la oferta de  $j_2$  en el periodo  $t=1$ , con una suma de dinero  $D$  en juego, es igual al subjuego que comienza  $j_1$  haciendo una oferta en  $t=0$  con una suma  $D$  en juego.

Si  $j_1$  realiza de entrada una propuesta aceptable,  $a_1(0) \rightarrow j_2$  en el siguiente periodo es también aceptable siempre que

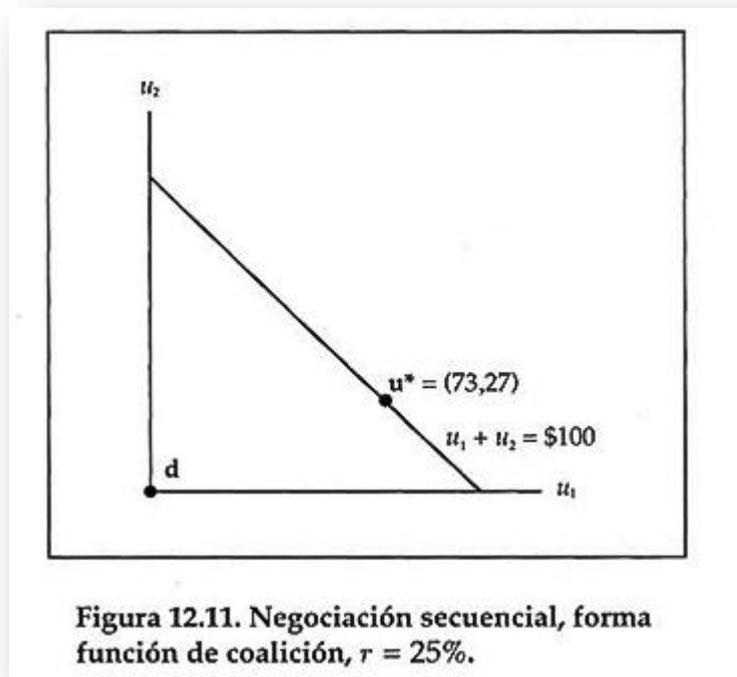
$$a_1(0) = a_2(1)$$

Uniendo ambas ecuaciones:

$$a_1(0)^* = \frac{D}{(1 + e^{-r})} = a_2(1)^*$$

Un resultado de equilibrio perfecto en subjuegos es que j1 pida  $a_1(0)^*$ , dejando a j2 la suma  $D - a_1(0)^* = De^{-r}/(1 + e^{-r})$ , que aceptará inmediatamente → Esperar no beneficia ya que los términos no van a mejorar nunca → **solución de negociación Stahl-Rubinstein.**

Para  $D = \$100$  y  $r = 25\%$  (interés disparatado) → j1 que empieza, obtiene 56,2% del dinero en juego, dejando para el segundo el 43,8%



a medida que baja el tipo de interés, se reduce el coste de esperar, y disminuye la ventaja de j1.

Con  $r = 5\%$ , el que actúa en primer lugar obtiene el 51,3% del dinero en juego

En el límite, cuando el tipo de interés se acerca a cero, desaparece la ventaja del j1 → el tiempo requerido entre el rechazo de una propuesta y la realización de una contrapropuesta tiende a cero.

### **12.7.-Negociación secuencial con información imperfecta:**

La solución Stahl-Rubinstein depende de que ambos jugadores saben exactamente la cantidad de dinero en juego. Esperar no aporta beneficios si ambos conocen dicha cantidad; pero si la información es imperfecta, esperar puede resultar beneficioso.

El rechazo de una propuesta y la posterior contrapropuesta por parte de un jugador informado puede señalar a la otra parte qué cantidad de dinero está realmente en juego.

Un ejemplo: j1 es un novelista que va a ofrecer su novela como guión; pero desconoce el valor que puede tener su novela para la compañía cinematográfica.

La probabilidad de que sea aceptada es del 90% para hacer una peli normal, con un valor de \$100.000 y del 10% de que sea un éxito, con un valor de \$1.000.000 (supuesto muy optimista)

La empresa cinematográfica, j2, conoce el valor de la novela pero lo oculta

Ambos jugadores son neutrales ante el riesgo y acuerdan que si llegan a un acuerdo se repartirán el dinero en un juego equitativo.

j1 puede pedir \$500.000, la mitad del valor si la novela es un éxito → si es un éxito, j2 que lo sabe, deberá aceptar inmediatamente; pero si es solo aceptable, j2 rechazará y esperará antes de hacer una contraoferta → Fase de espera, hasta que esa información (que la novela solo es normalita) se hace creíble.

Si j2 rechaza la propuesta de \$500.000 e inmediatamente vuelve y ofrece \$50.000, j1 deberá rechazar la propuesta → podría ser una mentira por valor de \$450.000. Pero si j2 espera lo suficiente, la señal se hace creíble. J2 ha de esperar lo suficiente para que el beneficio que podría reportar una mentira de \$450.000 desaparezca.

Si miente y rechaza un beneficio seguro de \$500.000, le tocarán  $(\$950.000)e^{-rt}$  durante la fase de espera →  $950.000 = \$500.000$  (beneficio de la compañía cinematográfica por conseguir una novela exitosa) + \$450.000 de la mentira.

La posible mentira de la compañía cinematográfica pierde todo su valor cuando

$$\$500.000 = (\$950.000)e^{-rt}$$

Despejando t, tenemos;

$$t = \frac{-\log(0,526)}{r} = \frac{0,64}{r}$$

Cuanto más bajo sea el tipo de interés, más tiempo deberá esperar la compañía cinematográfica antes de realizar su contraoferta de \$50.000.

Tomando un valor extremo,  $r=100\%/año \rightarrow$  la fase de espera dura 0,64 años, unos 7 meses. Si el tipo es solo del 10%, la fase de espera dura 6,4 años: por eso se prolongan tanto las negociaciones en Hollywood.

Si creemos que hemos escrito una novela de gran éxito, tardarán en convencernos de lo contrario.

### **12.8.- Las negociaciones comerciales entre EEUU y Japón:**

Las relaciones comerciales entre las dos principales economías del mundo les benefician a los dos. Las exportaciones hacen que su economía crezca y las importaciones que disminuya  $\rightarrow$  si existe equilibrio I-E, las ganancias del comercio se divide de forma igualitaria entre ambos.

Con los acuerdos actuales, Japón obtiene mayores beneficios comerciales que EEUU: superávit de \$50.000 millones a favor de Japón, un 73% del total del déficit comercial de EEUU  $\rightarrow$  las ganancias del comercio se repartirían más equitativamente si el déficit comercial se redujera hasta casi cero, como le ocurre a EEUU con otros socios comerciales.

En un mundo perfectamente competitivo los déficits comerciales de este tipo no durarían. Los precios (tipos de cambio, aquí) se ajustarían hasta desaparecer el déficit. El yen ha disminuido de 140 Y=\$1 hasta 100 Y=\$1, pero no ha desaparecido del déficit.

En 1993 los dirigentes de ambos países comenzaron una serie de reuniones para resolver el tema del déficit  $\rightarrow$  fijaron una agenda de conversaciones. Un comentario, referente a un acuerdo con resultados medibles, fuera de contexto por parte del secretario del tesoro USA llevó a Japón a tomar medidas y restricciones y acusaciones hacia EEUU, y al final de ese año, anunció un nuevo marco de conversaciones que debería incluir un acuerdo sobre principios; uno de los cuales era la bilateralidad: "si alguna de las partes reclama medidas unilaterales, la otra se reservará el derecho a suspender las conversaciones".

Después de una cumbre, Japón hizo una concesión sobre los resultados medibles, al expresar que estaría dispuesto a considerar “ejemplos ilustrativos”, cifras no vinculantes, pero que servirían de parámetros para medir el acuerdo.

Tras la cumbre de los siete grandes, ambas potencias acordaron un acuerdo marco: Japón se abriría a más importación, con normas y reglas transparentes para empresas extranjeras, y se comprometería a reducir el superávit con el resto de potencias, no solo con EEUU. Y EEUU se comprometió a reducir el déficit público y aumentar la competitividad de sus fabricantes.

## Apéndice

### Negociación en el laboratorio:

Alvin E Roth realizó varios experimentos en laboratorio; el marco básico: dos jugadores, elegidos entre la población estudiantil. A cada uno se le informa de que hay un premio grande y otro pequeño; si no gana uno, se le asigna automáticamente el otro.

El gran premio se adjudica por lotería al final del experimento al jugador que consiga el número ganador.

Al comienzo hay 100 billetes numerados del 1 al 100 y cuantos más consiga el jugador en la negociación, más posibilidades de ganar el gran premio. Los billetes de lotería representan el dinero en juego.

El número ganador se obtiene sacándolo al azar de una distribución uniforme; cada número igual probabilidad.

Los jugadores negocian cuantos billetes obtendrá cada uno. En caso de desacuerdo no se sorteará el gran premio y cada uno obtendrá el premio pequeño.

En 12.12 a, si j1 obtiene todos los billetes, está seguro de sacar el gran premio. Si es el j2, se lo llevará él.

Podemos convertir los billetes en utilidades:

$$u_i = t_i A_i + (1 - t_i)a_i$$

donde  $t_i$  es el número de billetes del jugador  $i$ ,  $A_i$  el gran premio del  $j_i$  y  $a_i$  el premio pequeño de  $i$ .

En los experimentos más sencillos el gran premio es  $A_i = \$1$  y el menor  $a_i = \$0$  para ambos jugadores.

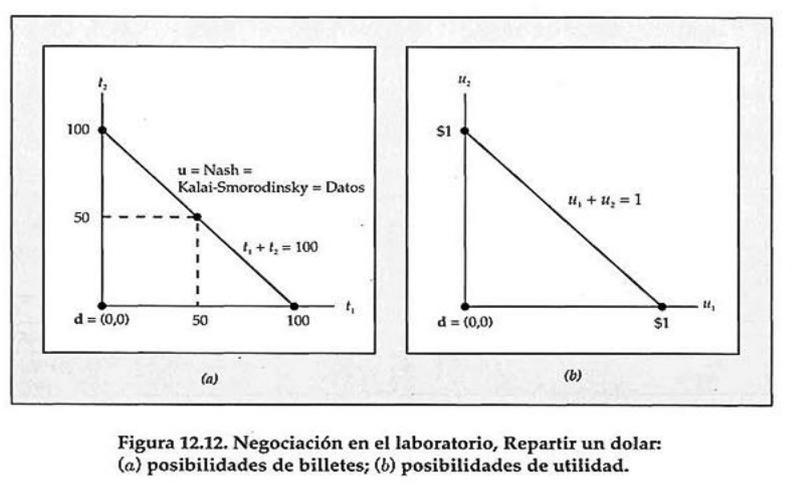


Figura 12.12. Negociación en el laboratorio, Repartir un dólar: (a) posibilidades de billetes; (b) posibilidades de utilidad.

En 12.12b, están las posibilidades de utilidad resultantes, representando un conjunto de reglas para jugar a Repartir un dólar.

Cuando los participantes jugaron, cada pareja (once en total) eligió una distribución de billetes 50-50, como predecía la solución de negociación.

Suponiendo que  $j_2$  pudiera recibir un máximo de 60 billetes, según la independencia de alternativas irrelevantes, esta restricción no debería importar.

La 12.13 muestra las posibilidades de billetes y posibilidades de utilidad resultantes:

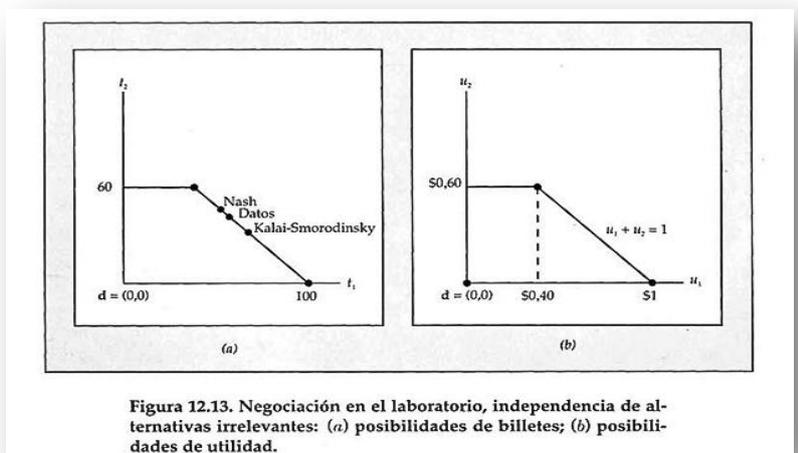


Figura 12.13. Negociación en el laboratorio, independencia de alternativas irrelevantes: (a) posibilidades de billetes; (b) posibilidades de utilidad.

Muchas parejas jugaron a este juego y en promedio  $j_2$  obtuvo 1,9 billetes menos que  $j_1$ , mientras que en la solución de Nash no se daban estas diferencias.

La elevada desviación estándar de la diferencia de billetes, 12, 2, sugiere que este resultado no es estadísticamente significativo.

La solución de Kalai-Smorodinsky dice que la restricción crea una diferencia a favor de  $j_1$ ; sin embargo, los billetes se deberían repartir con un ratio 5:3, de manera que  $j_1$  obtuviera 25 billetes más, en lugar de solo dos más.

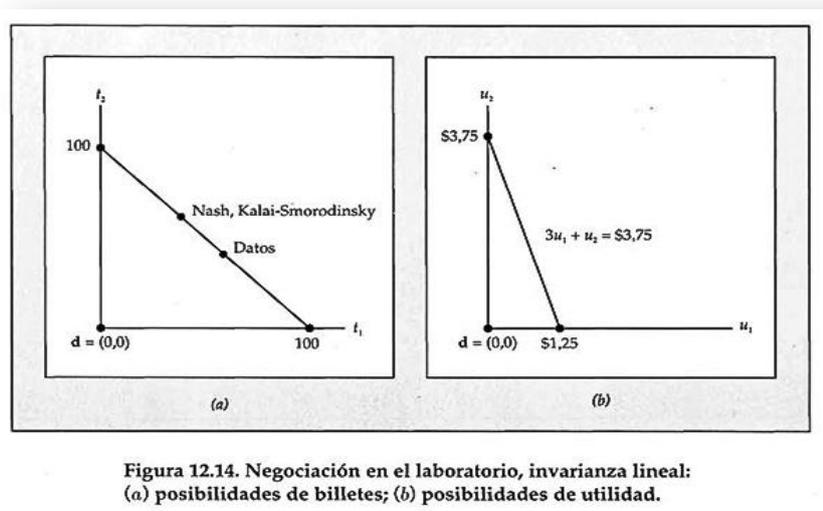
Al poner el límite al número de billetes de  $j_2$ , se introdujo ruido y los jugadores tuvieron dificultades al negociar.

Después los investigadores cambiaron el valor de los premios altos, pasando a \$1,25 para  $j_1$  y a \$3,75 para  $j_2$ ; los bajos se mantuvieron en \$0. No había límite en el número de billetes a obtener  $j_2$ , obteniéndose:

Según Nash, los jugadores se reparten el dinero en ratio 1:3, donde  $j_1$  obtiene \$0,625 y  $j_2$  obtiene \$1,875. Lo que se obtiene de la invarianza lineal aplicada al juego Repartir un Dólar.

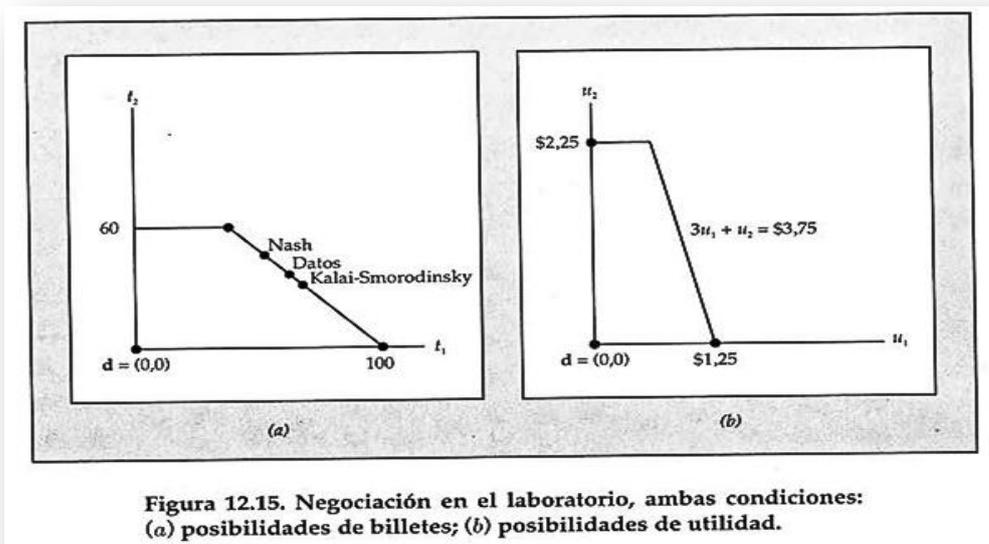
Esta división del dinero implica una visión equitativa de los billetes, 50-50.

La negociación de Kalai-Smorodinsky satisface la invarianza lineal y en este caso coincide con Nash.



Al jugarlo en el laboratorio ocurrió: el reparto no fue equitativo, pues j1 obtuvo un promedio de 34,6 billetes más que j2, con una desviación estándar muy grande, del 19,3, y el ratio observado es de más de 2:1 → se debe a que los acuerdos de reparto de billetes tendieron a agruparse entre el reparto 50-50 y el 75-25. El promedio de estos dos tipos de acuerdo es el valor intermedio observado, una diferencia entre 0 y 50.

Como último experimento, los valores de los premios se mantuvieron pero j2 solo podía pedir 60 billetes como máximo:



**Figura 12.15. Negociación en el laboratorio, ambas condiciones: (a) posibilidades de billetes; (b) posibilidades de utilidad.**

La solución de Nash continúa prediciendo que los billetes se repartirán equitativamente; la de Kalai-Smorodinsky establece que la utilidad se repartirá según el ratio 5:9, lo que implica 61 billetes para j1 y 39 para j2.

Cuando once parejas llegaron a acuerdos con este juego, la diferencia media en el número de billetes fue de 21,6 billetes a favor de j1 (desviación estándar de 22,5), resultado muy próximo a la predicción de Kalai-Smorodinsky, de 22 billetes para j1, y muy lejos de la predicción de Nash de que no habrá diferencia.

Conclusiones del experimento: mixtas. Los resultados no son tan claros como quiere la teoría de juegos y algunos hasta sorprendentes:

1. Un 20% de los casos no llegan a acuerdos, algo exigido por el principio de eficiencia.
2. Se alcanza mayor número de acuerdos en los 30 últimos segundos que en el resto del tiempo, con un máximo en 5 segundos

## Conceptos clave

juegos de negociación  
punto de desacuerdo  
reparto eficiente  
forma función de coalición  
simetría en la negociación  
eficiencia en la negociación  
invarianza lineal  
independencia de  
alternativas irrelevantes  
solución de negociación de Nash

juego de quiebra  
monotonicidad  
solución de negociación  
de Kalai-Smorodinsky  
espera en la negociación  
negociación secuencial  
solución de negociación  
de Stahl-Rubinstein  
negociación secuencial  
con información imperfecta

## Problemas

1. Dos jugadores neutrales ante el riesgo tienen \$500 en juego. Si no alcanzan un acuerdo el jugador 1 no obtiene nada, mientras que el jugador 2 tiene una opción externa de \$100. Hallar las soluciones de negociación de Nash y de Kalai-Smorodinsky. ¿Coinciden?

El punto de desacuerdo es  $d = (0, 100)$  mientras que la frontera de posibilidades para las utilidades (curva de reparto eficiente) es  $u_1 + u_2 = 500$ . La solución de Nash maximiza  $u_1(u_2 - 100)$  sujeto a la restricción  $u_1 + u_2 = 500$ . Sustituyendo la restricción en la función que maximizamos -previo despeje de  $u_2$ - tendremos  $u_1(400 - u_1)$ . Derivamos e igualamos a cero, de forma que  $0 = u_1(-1) + 400 - u_1$ , y de ahí  $u_1 = 200$ . Esto implica que  $u_2 = 300$ . La solución de Nash es por tanto  $u = (200, 300)$ .

Es un problema de optimización condicionada, por lo que podemos resolverlo también empleando un lagrangiano:

$$\max u_1(u_2 - 100)$$

$$\text{sujeto a la restricción } u_1 + u_2 = 500$$

Formamos el lagrangiano

$$L = u_1(u_2 - 100) - \lambda(u_1 + u_2 - 500)$$

$$- dL/du_1 = u_2 - 100 - \lambda = 0$$

$$- dL/du_2 = u_1 - \lambda = 0$$

$$- dL/d\lambda = u_1 + u_2 - 500 = 0$$

Despejando las  $\lambda$  e igualando tenemos  $u_2 - 100 = u_1$ . Sustituimos en la tercera expresión:

$$(u_2 - 100) + u_2 - 500 = 0$$

$$u_2 = 600/2 = 300$$

$$\text{Por tanto, } u_1 = u_2 - 100 = 200.$$

**2. Con los mismos datos del problema 1, hallar la solución de Kalai-Smorodinsky y compararla con la de Nash del problema 1.**

Para hallar la solución de Kalai-Smorodinsky tenemos que partir del vector de ganancias máximas, que es  $U = (500, 500)$ . La línea que une  $d$  con  $U$  responde a la ecuación

$$u_2 = 100 + 0,8u_1.$$

Esta línea corta a la frontera de posibilidades de utilidad, o curva de reparto eficiente, en

$$u_1 + 100 + 0,8u_1 = 500$$

Resolviendo obtenemos  $u_1 = 222$ . Esto implica que el jugador 2 obtiene  $u_2 = 278$ . La solución de Kalai-Smorodinsky es por tanto  $u = (222, 278)$

Las dos soluciones a este juego de negociación son diferentes, aunque ambas coinciden en que el jugador 2, aquel con una opción externa (véase  $d$ ), debería obtener más que el jugador 1.

¿Cómo llegar a la ecuación  $u_2=100+0.8u_1$ ? ¿Cómo se utiliza la opción externa con Kalai-Smorodinsky?

Se trata de unir dos puntos,  $(0, 100)$  y  $(500, 500)$ , con una recta. Por tanto:

$$(x - 0)/(500-0) = (y-100)/(500-100)$$

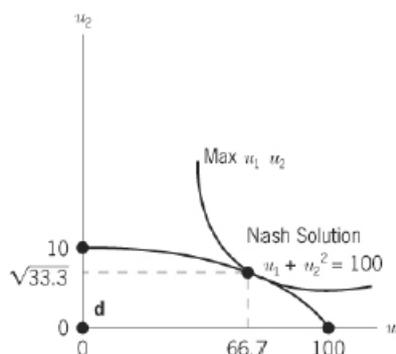
$$x/500 = (y - 100)/400$$

$$400x = 500y - 50000$$

$$y = 4x/5 + 100 \rightarrow y = 0,8x + 100$$

**3. En el problema 1, el jugador 1 es neutral ante el riesgo, y el jugador 2 averso al riesgo, con una función de utilidad  $u_2 = (\text{dinero})^{0,5}$ . Hallar las soluciones de negociación de Nash y de Kalai-Smorodinsky. ¿Coinciden?**

Partimos de  $u_2 = (a_2)^{0,5}$ , o lo que es lo mismo,  $u_2^2 = a_2$ , donde  $a_2$  es la cantidad de dinero. Las dos cantidades deben sumar  $D$ , de forma que  $a_1 + a_2 = D$ . Convertimos el dinero en utilidad con las correspondientes funciones de utilidad, y pasamos a tener que  $u_1 + u_2^2 = D$ , que es una curva. Para  $D = 100$  esa curva tiene la siguiente forma:



La solución de Nash consiste en alcanzar (punto de tangencia) la curva de indiferencia  $u_1u_2$  más alta posible con la curva de reparto eficiente. Formalmente, se trata de maximizar  $u_1u_2$  sujeta a la restricción  $u_1 + u_2^2 = D$ . Eso se hace mediante la formación de una *función auxiliar de Lagrange*:  $L = u_1u_2 - \lambda(u_1 + u_2^2 - D)$ , donde  $\lambda$  es el llamado *multiplicador de Lagrange*. Las condiciones de primer orden de máximo son:  $\partial L/\partial u_1 = 0$ ,  $\partial L/\partial u_2 = 0$  y  $\partial L/\partial \lambda = 0$ . De la primera tenemos  $u_2 - \lambda = 0$  y de la segunda  $u_1 - 2\lambda u_2 = 0$ . Despejamos de cada una de ellas  $\lambda$ , y tenemos que  $u_2 = \lambda$  y que  $\lambda = u_1/2u_2$ . Las igualamos y obtenemos  $2u_2^2 = u_1$ . Llevamos esa igualdad a lo que resulta de la tercera condición de primer orden, que es  $u_1 + u_2^2 = D$ , y tenemos  $3u_2^2 = 100$ , dado que  $D = 100$  (por seguir lo representado en el gráfico). De ahí obtenemos  $u_2 = 5,77$ , y por tanto  $u_1 = 66,67$ . Si resolvemos para  $D = 500$  y  $d = (0, 0)$  tendríamos  $3u_2^2 = 500$ ,  $u_2 = 12,91$ , y por tanto  $u_1 = 333,33$ . Esta es la solución de Nash.

Ya sabemos cómo se hace y qué aspecto tiene la solución. El caso más complicado que pide el libro, con  $D = 500$  y  $d = (0, 100)$ , presenta un problema en la solución (sale un valor negativo). Pero indicamos cómo se resolvería un caso de este tipo. La función a maximizar sería  $u_1(u_2 - 100)$ , debido al vector  $d$ . Por tanto,  $L = u_1(u_2 - 100) - \lambda(u_1 + u_2^2 - 500)$ , y de ahí tendríamos las condiciones de primer orden.

Problema matemático de optimización condicionada, con una restricción de igualdad.

Formalmente, se trata de maximizar  $u_1u_2$  sujeta a la restricción  $u_1 + u_2^2 = D$ .

Geoméricamente, a su vez puede verse como la búsqueda de un punto de tangencia entre las dos curvas.

Tendría que calcular la pendiente de ambas e igualarlas.

$$RMS(u_1u_2) = d(u_1u_2)/du_1 / d(u_1u_2)/du_2 = u_2/u_1$$

$$RMS(u_1 + u_2^2) = d(u_1 + u_2^2)/du_1 / d(u_1 + u_2^2)/du_2 = 1/2u_2$$

$$u_2/u_1 = 1/2u_2$$

$$2u_2^2 = u_1$$

#### 4. Con los mismos datos del problema 3, hallar la solución de Kalai-Smorodinsky y compararla con la de Nash del problema 3.

Vamos a ver la de Kalai-Smorodinsky. En el caso del gráfico, que es  $D = 100$ , tendríamos  $d = (0, 0)$  y los valores máximos son  $U = (100, 10)$ . En el caso  $D = 500$  tendríamos que buscar los puntos de corte de la *curva de reparto eficiente* con los ejes. Ésta sería  $u_1 + u_2^2 = 500$ . Cuando  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = 22,36$ ; cuando  $u_2 = 0$ ,  $u_1 = 500$ . Por tanto  $U = (500, 22,36)$ . Para  $D = 100$ , la línea que une  $d = (0, 0)$  y  $U = (100, 10)$  es  $u_2 = (0,1)u_1$ . Se obtiene calculando la recta que pasa por dos puntos. En el caso de  $D = 500$  tendríamos que hallar la línea que une  $U = (500, 22,36)$  y  $d = (0, 100)$ . No lo vamos a hacer.

Vamos a seguir con el caso más sencillo del gráfico, para  $D = 100$ ,  $d = (0, 0)$  y  $U = (100, 10)$ . Sustituimos la línea  $u_2 = (0,1)u_1$  en la curva de reparto eficiente, que es  $u_1 + u_2^2 = 100$ , y tendremos  $10u_2 + u_2^2 = 100$ . Resolviendo tenemos  $u_2 = 6,18$ , y por tanto, dado que  $u_2 = (0,1)u_1$ ,  $u_1 = 61,8$ . En la solución de Kalai-Smorodinsky con un jugador averso al riesgo el neutral vuelve a obtener más que el averso. El neutral obtiene 61,8 de 100 y el averso lo que queda, que es 38,2. *En general, si eres averso al riesgo, es mejor no hacerlo ver en un proceso de negociación.*

5. Los jugadores 1 y 2 son los acreedores en un juego de quiebra. El jugador 1 presenta una demanda de 1 millón de dólares, y el jugador 2 otra de 5 millones de dólares. Ambos son neutrales ante el riesgo. Calcular las soluciones de negociación de Nash y Kalai-Smorodinsky cuando los activos en juego son 1 millón de dólares, 3 millones de dólares y 5 millones de dólares. Comparar las dos soluciones.

Cuando los activos son de 1 millón, tanto el criterio de Nash como el de Kalai-Smorodinsky coinciden en dividirlo igualmente entre los dos acreedores, 0,5 millones para cada uno. Cuando los activos son de 3 millones, el criterio de Nash lleva a pagar todo lo que pide el acreedor que pide menos (1 millón), y el otro recibe lo que queda (2 millones). En cambio, Kalai-Smorodinsky pagaría según un ratio de 1 a 5, es decir, 0,5 millones para el jugador 1 y 2,5 para el jugador 2. Cuando los activos suman 5 millones, el criterio de Nash paga al que reclama menos todo lo que solicita, que es 1 millón, y al otro el resto, que son 4 millones. Por otro lado, Kalai-Smorodinsky pagaría según un ratio de 1 a 5, y por tanto, 0,83 millones al acreedor que reclama menos y 4,17 al que pide más.

Vamos a verlo en detalle:

Es un juego de quiebra. El jugador 1 presenta una demanda de 1 millón ( $C_1$ ), y el jugador 2 de 5 millones ( $C_2$ ). Tenemos que  $U = (1, 5)$  y que  $d = (0,0)$ .

Caso A: el importe de la liquidación (A) es de 1 millón.

*Solución de Nash:* De las dos peticiones,  $C_1$  y  $C_2$ , ninguna de ellas excluye la posibilidad de esa solución simétrica (estaríamos en el Caso 1, siendo que  $A/2 = C_1$ , y no en el Caso 2), así que la propiedad de las alternativas irrelevantes explica que la solución se mantenga.

*Solución de Kalai-Smorodinsky:* exactamente la misma. La recta de ganancias máximas es una bisectriz (hay 1 millón a repartir), y la de eficiencia tiene ángulos de  $45^\circ$ . El punto de corte es el medio.

Caso B: el importe de la liquidación es de 3 millones.

*Solución de Nash:* Aquí es obvio ya que  $A/2 > C_1$ , por lo que estamos en el caso 2, y aquí el acreedor con menor deuda la satisface plenamente y lo que sobra es para el acreedor con mayor deuda. Por tanto, el jugador 1 obtiene 1 millón y el jugador 2 los 2 millones restantes.

*Solución de Kalai-Smorodinsky:* La línea que une esos dos puntos es  $u_2 = 5u_1$ . La recta de ganancias eficientes es  $u_1 + u_2 = 3$ . Resolvemos el sistema:  $3 - u_1 = 5u_1$ ,  $u_1 = 1/2$ , y  $u_2 = 5/2$ . Ambos en millones. El ratio es 1 a 5.

Caso C: el importe de la liquidación es de 5 millones.

*Solución de Nash:* Aquí es obvio ya que  $A/2 > C_1$ , por lo que estamos en el caso 2, y aquí el acreedor con menor deuda la satisface plenamente y lo que sobra es para el acreedor con mayor deuda. Por tanto, el jugador 1 obtiene 1 millón y el jugador 2 los 4 millones restantes.

*Solución de Kalai-Smorodinsky:* La línea que une esos dos puntos es  $u_2 = 5u_1$ . La recta de ganancias eficientes es  $u_1 + u_2 = 5$ . Resolvemos el sistema:  $5 - u_1 = 5u_1$ ,  $u_1 = 5/6$  (=0,83), y  $u_2 = 25/6$  (=4,16). Ambos en millones. El ratio es 1 a 5.

La solución de Kalai-Smorodinsky trata al que reclama cantidades mayores mejor que la de Nash, al menos cuando los activos superan el millón.

Hay un pequeño error en una de las observaciones de esa solución al problema.

Es un juego de quiebra. El jugador 1 presenta una demanda de 1 millón, y el jugador 2 de 5 millones. Tenemos que  $d = (0,0)$  y  $U = (1, 5)$ .

Caso A: el importe de la liquidación es de 1 millón.

Solución de Nash: De las dos peticiones,  $C_1$  y  $C_2$ , ninguna de ellas excluye la posibilidad de esa solución simétrica (estaríamos en el Caso 1, y no en el Caso 2), así que la propiedad de las alternativas irrelevantes explica que la solución se mantenga.

Solución de Kalai-Smorodinsky: exactamente la misma. La recta de ganancias máximas es una bisectriz (hay 1 millón a repartir), y la de eficiencia tiene ángulos de  $45^\circ$ . El punto de corte es el medio.

Caso B: el importe de la liquidación es de 3 millones.

Solución de Nash: Aquí es obvio ya que  $A/2 > C_1$ , por lo que estamos en el caso 2, y aquí el acreedor con menor deuda la satisface plenamente y lo que sobra es para el acreedor con mayor deuda. Por tanto, el jugador 1 obtiene 1 millón y el jugador 2 los 2 millones restantes.

Solución de Kalai-Smorodinsky: La línea que une esos dos puntos es  $u_2 = 5u_1$ . La recta de ganancias eficientes es  $u_1 + u_2 = 3$ . Resolvemos el sistema:  $3 - u_1 = 5u_1$ ,  $u_1 = 1/2$ , y  $u_2 = 5/2$ . Ambos en millones. El ratio es 1 a 5.

Caso C: el importe de la liquidación es de 5 millones.

Solución de Nash: Aquí es obvio ya que  $A/2 > C_1$ , por lo que estamos en el caso 2, y aquí el acreedor con menor deuda la satisface plenamente y lo que sobra es para el acreedor con mayor deuda. Por tanto, el jugador 1 obtiene 1 millón y el jugador 2 los 4 millones restantes.

Solución de Kalai-Smorodinsky: La línea que une esos dos puntos es  $u_2 = 5u_1$ . La recta de ganancias eficientes es  $u_1 + u_2 = 5$ . Resolvemos el sistema:  $5 - u_1 = 5u_1$ ,  $u_1 = 5/6 (=0,83)$ , y  $u_2 = 25/6 (=4,16)$ . Ambos en millones. El ratio es 1 a 5.

**6. Le llaman para testificar en un caso de quiebra como testigo experto de un pequeño acreedor. Le preguntarán en el juicio si debería utilizarse la solución de negociación de Nash. Prepare su testimonio; le pagarán bien.**

El testimonio debería centrarse en la independencia de las alternativas irrelevantes, ya que todas las soluciones razonables satisfacen simetría, eficiencia e invarianza lineal. El argumento básico basado en Nash sería el siguiente. Si cada uno de los dos acreedores tienen la misma reclamación, los requerimientos de eficiencia y la simetría implicarían necesariamente una división de los activos a partes iguales. Aquí lo que cuenta es que las reclamaciones de ambos son iguales, y eso es determinante. Imaginemos ahora que la reclamación del primer acreedor es algo menor que la del segundo, por 1 dólar. ¿Es relevante esta diferencia? No si ambos acreedores reciben mucho menos de lo que se les adeuda. El acreedor 1 no debería recibir menos que el segundo. No desde luego según la propiedad de independencia respecto de las alternativas irrelevantes. Esto quiere decir que si la primera solución –cuando las reclamaciones eran iguales– está disponible después de “quitar” un dólar a una, será todavía la solución después de quitarlo. El hecho de sustraer 1 dólar de la reclamación del primer acreedor no altera el hecho de que una división a partes iguales de los activos del deudor quebrado todavía es una posibilidad, y de hecho, la solución al problema.

La siguiente analogía se utiliza a menudo como argumento en defensa de la condición de independencia de las alternativas irrelevantes. Imaginemos que de 3 candidatos a presidentes –Clinton, Bush padre y Perot– Clinton es la mejor opción. En ese caso Clinton seguirá siendo la mejor opción tanto si Perot sigue hasta el final como si se retira. Dicho de forma más abstracta, si A es preferida a B y B es preferida a C, por la propiedad transitiva A es preferida a C, y la desaparición de C no altera la relación entre A y B, de forma que A seguirá siendo preferida. Esta es la lógica que subyace a la solución del problema de la quiebra. Aquí acabaría el testimonio.

La verdad es que la condición de independencia es menos convincente en el contexto de un problema de quiebra que en el contexto de unas elecciones, donde los políticos no se pueden dividir en partes.

7. Hay 1 billón de dólares en juego en las relaciones comerciales entre Estados Unidos y Japón. Las conversaciones entre ambos son secuenciales, hay información perfecta y el tipo de interés es del 10%. Durante las conversaciones se suspenden las transacciones comerciales. Estados Unidos tiene que hacer la primera oferta. ¿Qué debería ofrecer a Japón? ¿Qué debería hacer Japón ante la oferta?

Una vez se suspenden las transacciones comerciales la situación se ajusta a la de una negociación secuencial con EE.UU. como jugador 1 haciendo la primera oferta. Con un factor de descuento de 0,9 ( $= 1/(1+r)$ ) la cantidad que EE.UU. pide según la fórmula de Stahl-Rubinstein es  $a_1(0) = \$1 \text{ billón}/(1+0.9) = \$526,3$  cientos de miles de millones. La cantidad restante, \$473,7 cientos de miles de millones, es ofrecida por EE.UU. a Japón, y éste acepta.

8. Mostrar que cuando el tipo de interés es  $r = 0$ , la solución de Stahl-Rubinstein reparte el dinero en juego de forma equitativa.

En la fórmula de Stahl-Rubinstein el jugador 1 pide  $a_1(0) = D/(1+R)$ . Cuando el factor de descuento es  $R = 1$ , lo anterior queda reducido a  $a_1(0) = D/(1+1) = D/2$ . El jugador 1 pide la mitad de la cantidad  $D$  en disputa, ofreciendo el resto al jugador 2, que acepta.

9. En las negociaciones entre un novelista y una productora, supongamos que una novela aceptable tiene un valor de \$400.000 y el tipo de interés es del 20%. Describa la solución de negociación. ¿Cuánto esperará la productora? ¿Sería justo decir que el novelista hace que la productora espere?

Las probabilidades son las mismas que vimos, con un 90% de que la novela permita hacer una película aceptable y un 10% de que salga un exitazo. La mejor estrategia para el novelista, que mueve primero, es pedir la mitad del valor generado por el exitazo, es decir, 500.000 dólares. Si la productora sabe que la novela llevará a un gran éxito de pantalla, debería aceptar inmediatamente. Si la productora sabe que no será así, deberían rechazar la propuesta del novelista, pues no van a pagar 500.000 por algo que vale 400.000. En ese momento empieza el período de espera. La productora de cine podría ofrecer 200.000 (la mitad de lo que generaría una novela sólo aceptable, que es 400.000), pero esta oferta no será creíble hasta que no haya pasado un período de tiempo  $T$  tal que  $500.000 = 800.000 R^T$ . Siendo  $R = 1/(1+0,2) = 0,83$ .

Esos 800.000 es el valor de la mentira para la productora de cine, si el novelista aceptara inmediatamente una oferta de 200.000 por una novela que generará un gran éxito de taquilla.

Si resolvemos la ecuación no lineal (tomando logaritmos) obtendremos  $\log(0,625) = T \log(0,83)$ , y de ahí, despejando  $T$ , tendremos que  $T = 2,5$  años de espera.

La compañía productora de cine tiene que esperar 2,5 años para que su rechazo de una oferta de 500.000 dólares sea creíble. Tras esta larga espera el valor de la mentira se ha evaporado totalmente, y el novelista podrá creer a la productora cuando le dice que la película que harán no generará más que 400.000 dólares de beneficios. Las consideraciones de credibilidad aconsejan la espera, y por tanto procesos de negociación largos. En el mundo real, obviamente, los cálculos no son exactos y las partes se impacientan, pero es el principio general y su lógica lo que debe retenerse como lección.

10. **Usted representa a Japón en las próximas conversaciones con Estados Unidos. Describa su posición negociadora: ¿Qué espera sacar de las conversaciones? ¿Qué estaría dispuesto a hacer en caso de desacuerdo? ¿Qué tipo de contraoferta utilizaría? ¿Qué papel juega el establecimiento de una fecha límite en las negociaciones?**

Si las negociaciones entre EE.UU. y Japón, o entre EE.UU y la UE tienen una fecha límite, las ofertas pueden convertirse fácilmente en ultimátums. El primero que lance un ultimátum, si este no está cerca de un equilibrio, puede llevar a una ruptura de las negociaciones.

Como un negociador de la UE, tendrás algunos objetivos prioritarios, como la protección de industrias sensibles o estratégicas, lo que te llevará a buscar un acuerdo lo más cercano posible al status quo para esos sectores.